



TITLE:

有効ポテンシャルと相転移のダイナミックス(筑波大学開学20周年記念第2回『非平衡系の統計物理-現状と展望』シンポジウム(追加),研究会報告)

AUTHOR(S):

森川, 雅博

CITATION:

森川, 雅博. 有効ポテンシャルと相転移のダイナミックス(筑波大学開学20周年記念第2回『非平衡系の統計物理-現状と展望』シンポジウム(追加),研究会報告). 物性研究 1994, 62(4): 494-507

ISSUE DATE:

1994-07-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/95358>

RIGHT:

有効ポテンシャルと相転移のダイナミックス

森川雅博

御茶ノ水大学 理学部 物理
東京都文京区大塚 2-1-1
電子メール: HIRO@PHYS.OCHA.AC.JP

要旨

我々は非平行不可逆過程の場の理論に基づいて、特に宇宙初期の相転移の途中の時間発展をどのように記述するかを探る。初めに、初期宇宙インフレーションモデルにおける相転移の基本的な問題点を6つに要約する。次に、これらの問題点を解決する為に、閉じた時間経路の経路積分の方法を用いて、揺動と散逸がある系の局所的な秩序パラメータを定義する。そしてその時間発展方程式を求める。さらに、この方法を、相互作用のある不安定なスカラー場の系に応用し、相転移の具体的な様相を調べる。我々は、この解析を通じて、通常相転移の議論に現象論的に用いられる有効ポテンシャルの意味付けをおこなう。この際、よく議論される有効ポテンシャルの病的な様相、つまり上に凸な部分が存在したり複素数になったりすること、がどのように回避されるかを議論する。

I. 導入

初期宇宙論においては、いわゆるインフレーションモデル [文献1] が精力的に研究されてきた。このモデルは、スカラー場などの卓越した真空のエネルギーが指数関数的宇宙膨張を引き起こし、引き続きこの真空のエネルギーが潜熱として開放されて、現在の宇宙の大きな構造とエントロピーを作ったとするものである。これはスケールの大きな相転移の動力学にはかならない。過去に、宇宙論研究者はこの問題にかなり現象論的にアプローチしてきた [文献2]。特に、相転移の進行具合をあらわす秩序パラメターの時間発展に関して、場の理論で安定な真空を探す為の有効ポテンシャルを用いて来た。最近、このインフレーションのモデルに、量子論的揺らぎや量子コヒーレンスが絡んでくると [文献3]、より根本的な相転移の動力学の理論体系が求められるようになってきた。

まず、インフレーションモデルのエッセンスを3つのステップに分けて簡単に説明しておこう。

ステップ1) 宇宙が創生してほぼ $t \approx 10^{-36}$ sec ごろ、真空のエネルギーが輻射のエネルギーを凌いで、この真空のエネルギーが宇宙膨張によって薄まらない為に、宇宙は指数関数的膨張をするようになる。このシナリオは、例えばスカラー場の真空期待値が、ポテンシャル上をゆっくりとした時間発展する時に実現する。この指数関数的膨張は、一様な空間の中に長距離の相関を作り、現在観測されている銀河団などの大規模構造を可能にした。

ステップ2) 宇宙がインフレーションを起こして、すべての構造が引き伸ばされるが、この時スカラー場の零点振動もそうである。この量子揺らぎとしての振動が引き伸ばされて、宇宙の大規模構造の種を作ったと考える。

ステップ3) ゆっくり発展した真空期待値は、そのうちポテンシャルの最少に向かって転がり落ちる。この際、コヒーレントに存在した真空のエネルギーが潜熱として開放されて宇宙を加熱し、バリオンの生成等の過程につながっていく。この際、 $(2.7K)^2(10^{28} \text{ cm})^3 \approx 10^{87}$ という大きなエントロピーが生成されたとする。

この研究会報告では、現在まで広く議論されているインフレーションモデルの問題点のうち、特に統計力学的なものを6つのカテゴリーに分けて取り上げて、その後、これらの問題を解決する為の提案をしたい。

II 相転移としてのインフレーションモデルにおける問題点

問題1. 有効ポテンシャルは相転移の動力学を記述するか？

初期宇宙の相転移を議論する時、秩序変数としてのスカラー場の真空期待値の時間発展に対して、我々はよく有効ポテンシャルを用いる。有効ポテンシャルは、量子論的補正を含めたポテンシャルで、例えば、SU5-相転移では、

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\alpha^2\phi^4(\ln(\phi^2/\sigma^2)) - \frac{1}{2} - \frac{m^2}{\alpha^2\sigma^2} + \frac{1}{8}\alpha^2\sigma^4(1 - \frac{2m^2}{\alpha^2\sigma^2}). \quad (2-1)$$

ここに $\alpha^2 = \frac{5}{8\pi} g^2$, $\sigma \approx 1.2 \times 10^{15} \text{ GeV}$ である. 自然ではあるが, 我々は秩序パラメターの時間発展に対して明確な理論を持っていないし, どのような状況の時に, この有効ポテンシャルを用いられるのか不明である.

問題 2. 秩序変数をどのように定義するか?

そもそも, 秩序変数をどのように定義するかについて, 我々は一致した見解を持っていない. 通常, 単に場の真空期待値 $\langle \phi \rangle$ を用いる. しかし, きちんといえば, この値が 0 の対称状態から有限の値まで, 対称性を保つハミルトニアンによって発展することはないのである. この点を改良しようと, ある人々は, 場の分散 $\langle \phi^2 \rangle$ を秩序パラメターとして提案する [文献 4]. 確かに, この量は, 相転移がどの程度進行したかの目安を与えるが, 逆に, 場が単にスクイーズされているだけでも, この量はいくらでも大きくなる. 従って, 相転移後の空間的秩序をも表現する秩序変数の定義はどのようにしたら良いのかという問題がある.

問題 3. 相転移によって, どのようにフォック空間が変わっていくのか?

相転移によって, 初期の対称状態は, 沢山の可能な非対称状態のうち一つを選んでそこに行き着く. この時間発展は決して決定論的ではありえない. このような時間発展は, 純粹の場の理論の中では記述できない. ではどうするかという問題がある.

問題 4. 有効ポテンシャルは厳密には下に凸である.

有効ポテンシャルは, 自由エネルギーのルジャンドル変換であるという定義そのものから, 厳密に下に凸である: つまり $\alpha + \beta = 1$ に対して,

$$V_{\text{eff}}(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) \leq \alpha V_{\text{eff}}(\phi_1) + \beta V_{\text{eff}}(\phi_2). \quad (2-2)$$

しかし, そうなら, 対称状態以外の状態がエネルギー最少状態になり得ないので, 相転移は進行しない事になる. 実際は, 我々は有効ポテンシャルにたいする摂動論を用い, この時には, 上に凸な部分が有効ポテンシャルに現れる. 例えば, 1-ループ近似のスカラー場の有効ポテンシャルは

$$V_{\text{eff}}[\phi] = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left(1 - \frac{\frac{\lambda}{2} \phi^2}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \quad (2-3)$$

となり, これは上に凸な部分を持つ. 我々はまさにこの状況を相転移の時に設定するのだが, これが, 1-ループ近似の限界を示すものなのかどうか定かでない.

問題 5. 有効ポテンシャルは実数でない.

これは, 問題 4 とならんで, 有効作用を相転移の動力学に用いる場合のもう一つの困難である. 本来実である場が, 複素数になってしまうと物理的解釈が成り立たなくなる. これは,

質量が負であったり、有限温度の場の場合に起きる。同じく1-ループ近似において、式(2-3)の積分は、 \ln の引き数が負になる為に、虚部を生成する：

$$\text{Im}V_{\text{eff}}[\phi] = \frac{-1}{64} \left[\left(-\mu^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2 \right) \theta \left(\mu^2 - \frac{\lambda}{2} \phi^2 \right) \right]. \quad (2-4)$$

この虚数部分は使った近似の限界をあらわしているのだろうか？一方、この虚部は、物理的に重要な量をあらわすこともある。例えば、場のトンネル確率や崩壊確率は、自由エネルギーの虚数部分であらわされる[文献5]。従って、この虚数部分の持っている物理的な情報をいかに取り出すかが問題となる。

問題6. 自発的対称性の破れの起源は何か？

自発的対称性の敗れを議論する時、我々は非決定論的な要素を必要とする。通常の場合の理論は常に決定論的であるので、その非決定論的要素がどこから来るのかが問題になる。物性論においては、考えている系が孤立していなくて、必ず外界の揺動が影響する。有限温度の場の理論においては、その非決定論的要素は、有限温度平均の中にあらかじめ入っている[文献6]。しかし、初期宇宙のインフレーションの時期には、その様な非決定論的要素はなかなかない。また、どこからどこまでが系でどこからが外界かを明確に区別する条件が無い。従って、そもそもその様な非決定論的要素の起源が問題となる。たいていの宇宙論研究者は、場の2点相関関数 $\langle \phi(x)\phi(y) + \phi(y)\phi(x) \rangle$ が自由場においても統計的揺らぎを表すと考えているが、その確固たる根拠はない。

以下のセクションでは、以上の問題点に答えていく。

III. 秩序変数をいかに定義するか？

通常我々は秩序変数として、その相転移にかかわる場、例えばヒッグス等のスカラー場、の真空期待値 $\phi = \langle \hat{\phi} \rangle$ を考える。そしてこの変数に関しては、有効作用 $\Gamma[\phi]$ を用いてその定義からすぐ出てくる式

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} = -J \quad (3-1)$$

を、この変数の従う運動方程式と考えるのが自然である。本来、有効作用 $\Gamma[\phi]$ は、場の頂点関数の生成汎関数であり、方程式(3-1)は完全に非局所的である。しかし、相転移の動力学が問題になるようなマクロな系では、量子相関の崩壊(デコヒーレンス)のために、有効作用 $\Gamma[\phi]$ は非常に多くの量子力学的相関の無い独立な履歴の重ねあわせになっている。この重ねあわせのために、デコヒーレンスのある系に(3-1)を適用しても、個々の実現する履歴を表せない。だから、 $\phi = \langle \hat{\phi} \rangle$ を秩序変数として採用すると、常に平均量の時間発展しか表さない。以下では、 $\Gamma[\phi]$ の持っている重ねあわせをどのようにほどくかがポイントとなる。

1) 閉じた時間経路の経路積分法

非平行不可逆過程を扱う最も適切な方法は、閉じた時間経路の経路積分法 (Keldish-Shwinger法) であろう [文献7]。これは特に、物理量の期待値の時間発展を追うのに威力を発揮する。この方法に基づけば、通常量子補正に加えて、揺動散逸などの統計力学的な反作用も、以下に見るように、整合的に取り込むことができる。

分配関数は

$$\tilde{Z}[\tilde{J}] \equiv \text{Tr}[\tilde{T}(\text{Exp}[i \int \tilde{J}\tilde{\phi}]\rho)] \equiv \text{Exp}[i\tilde{W}[\tilde{J}]] \quad (3-2)$$

と表せる。ここで、時間積分路は $-\infty$ から $+\infty$ まで (+経路)，そしてさらに $-\infty$ に帰る経路 (-経路) ととる (図1)。

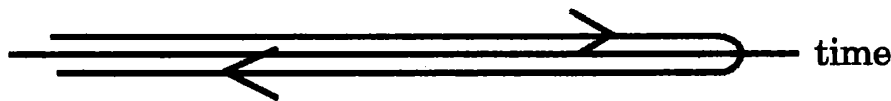


図1

そして、上に波線の付いたあらゆる量は、この閉じた時間経路上に値を持つ関数を表す。又、 \tilde{T} はこの閉じた時間経路に対する時間順序への並べ替えの作用素である。 \tilde{J} は外場である。 ρ は初期密度行列であり、場 ϕ はハイゼンベルグ表示のものである。この分配関数は、相互作用表示では、

$$\begin{aligned} \tilde{Z}[\tilde{J}] &= \text{Tr}[\tilde{T}(\text{Exp}[i \int \tilde{J}\tilde{\phi} - i \int V[\phi]]\rho)] \\ &= \text{Exp}[-i \int V[\frac{\delta}{i\delta\tilde{J}}]] \text{Exp}[-\frac{i}{2} \iint \tilde{J}(x) \tilde{G}_0(x,y) \tilde{J}(y)] \text{Tr}[\text{Exp}[i \int \tilde{J}\tilde{\phi}]\rho]. \end{aligned} \quad (3-3)$$

となる。ここで、 $L[\phi] = L_0[\phi] - V[\phi]$ ， $\tilde{J}(x) = J_+(x) - J_-(x)$ ， $\tilde{\phi}(x) = \phi_+(x) - \phi_-(x)$ ，そして、 $\int \tilde{J}\tilde{\phi} = \int dx J_+(x)\phi_+(x) - \int dx J_-(x)\phi_-(x)$ 等と書いた。

この形式での2点相関関数は、 x, y がそれぞれ、+経路，-経路上にある場合を考えて、

$$\tilde{G}_0(x,y) = \begin{pmatrix} G_F(x,y) & G_+(x,y) \\ G_-(x,y) & G_{\bar{F}}(x,y) \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

と書かれる。ここで、

$$\begin{aligned} iG_F(x,y) &= \langle T\phi(x)\phi(y) \rangle, & iG_{\bar{F}}(x,y) &= \langle \bar{T}\phi(x)\phi(y) \rangle, \\ iG_+(x,y) &= \langle \phi(y)\phi(x) \rangle, & iG_-(x,y) &= \langle \phi(x)\phi(y) \rangle. \end{aligned} \quad (3-5)$$

である。ただし、これら4つのうち独立な関数は3つであり、これらを運動量表示で $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ と書くと、式(3-5)の運動量表示は、

$$\hat{G}_F(k) = \frac{D(k) - iB(k)}{D(k)^2 + A(k)^2}, \quad \hat{G}_{\bar{F}}(k) = \frac{-D(k) - iB(k)}{D(k)^2 + A(k)^2}, \quad \hat{G}_{\pm}(k) = -i \frac{D(k) \mp iB(k)}{D(k)^2 + A(k)^2}. \quad (3-6)$$

となる.

もし, 秩序変数を $\tilde{\varphi}(x) \equiv \frac{\delta \tilde{W}}{\delta \tilde{J}}$ で定義し, $\tilde{\Gamma}[\tilde{\varphi}] \equiv W[\tilde{J}] - \int \tilde{J} \tilde{\varphi}$ で有効作用を定義すると, それから従う式

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta \tilde{\varphi}(x)} = -\tilde{J}(x) \quad (3-7)$$

は秩序変数に対する運動方程式とみなせる. これは, 因果的で実の方程式となる. しかしながら, もし初期に $\tilde{\varphi}(x)=0$ なら原理的に常に $\tilde{\varphi}(x)=0$ である. これでは相転移の記述はできない. $\tilde{\varphi}(x)$ が 0 から発展しない理由は, $\tilde{\varphi}(x)$ が平均量であって, 例え系の部分部分が有限の秩序変数を持つようになって, 平均されて 0 に落ち着くからである.

さらに, この有効作用は複素数になってしまうという問題もあったことを思い出そう. しかし, ここにこそ一つの解決の糸口がある. 有効作用 $\tilde{\Gamma} = \text{Re} \Gamma + i \text{Im} \Gamma$ の虚部は, 引き数 $\tilde{\varphi}_{\pm}$ の取り替えに対して偶である: $\text{Im} \Gamma = (\text{even in } \varphi_{\Delta}(x)) = \frac{1}{2} \iint \varphi_{\Delta}(x) B(x-y) \varphi_{\Delta}(y) + \dots$. そしてこの積分核 $B(x-y)$ は正値をとる. 従ってガウシアン近似の範囲で, 有効作用は, 実数の補助場 $\xi(x)$ を用いて,

$$e^{i\tilde{\Gamma}[\varphi]} = \int [d\xi] P[\xi] \text{Exp}[i \text{Re} \Gamma + i \xi \varphi_{\Delta}] \quad (3-8)$$

と書ける. ここで,

$$P[\xi] = \text{Exp}[-\frac{1}{2} \iint \xi B^{-1} \xi] \quad (3-9)$$

は, ガウシアン統計的重み関数と解釈できる. 一方,

$$\text{Re} \Gamma + \xi \varphi_{\Delta} \quad (3-10)$$

のほうは実であって, 分離された純正な有効作用と解釈される. ここで, 式(3-10)を $\varphi_{\Delta}(x)$ に関する変分原理を適用すれば, 我々は秩序変数 $\varphi_c(x)$ に対する, ランジュバン方程式を得ることができる.

実際, もしこの統計的平均を $\langle \dots \rangle_{\xi} \equiv \int [d\xi] \dots P[\xi]$ で定義すると, 補助場の相関は $\langle \xi(x) \xi(y) \rangle_{\xi} = B(x-y)$ となる. このように, 全体系の有効作用が, 実で統計的に独立な局所的有效作用の重ねあわせの形に分解された. しかし, 以上の直観的な議論を正当化する為には, 分配関数からきちんと議論しなければならない.

2) 局所的秩序変数

ガウシアン近似の場合にまず考えよう．全体系の分配関数は，

$$Z[J] = \text{Exp}[iW[J]]$$

$$= \text{Exp}\left[-\frac{1}{8} \iint J_{\Delta} G_C J_{\Delta} - \frac{i}{4} \iint [J_{\Delta} G_R J_C + J_C G_R J_{\Delta}]\right]$$

$$= \int d[\eta] Q[\eta] z[J, \eta].$$

(3-11)

と表される．ここで分配関数の虚数部分を分離して得られる部分を

$$Q[\eta] = \text{Exp}[-2 \iint \eta G_C \eta]$$

(3-12)

と書き直し，局所的な分配関数を

$$z[J, \eta] = \text{Exp}\left[-\frac{i}{4} \iint [J_{\Delta} G_R J_C + J_C G_R J_{\Delta}] + i \iint J_{\Delta} \eta\right].$$

(3-13)

と定義した．すると，

$$\varphi(x) = \frac{\delta \text{Log} z[J, \eta]}{i \delta J} = -\Pi J + \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3-14)

と表わされる．ここで，

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & G_R \\ G_A & 0 \end{pmatrix}$$

(3-15)

であり，通常使われる平均量としての秩序変数を $\bar{\varphi}(x)$ とすると，

$$\varphi = \bar{\varphi}(\text{defined from } \Gamma) + \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3-16)

となる．ここで，局所的な有効作用を，局所的な分配関数 $z[J, \eta]$ のルジャンドル変換として

$$\gamma[\varphi] = -i \text{Log}[z[J, \eta]] - J\varphi \Big|_{J=J[\varphi]}$$

(3-17)

と定義しよう．すると， $\delta\gamma/\delta\varphi = -J$ から

$$(\partial_x \partial_x + m^2)\varphi + \int_{-\infty}^t dt' \int dx' A(x-x')\varphi(x') - \xi = -J_C.$$

(3-18)

という局所的秩序変数に対する運動方程式が得られる．これは，以前の式(3-10)の変分から得られる式と形式的に同じである．このようにして，ガウシアンの場合には，有効作用を局所的有効作用の統計的重ねあわせとして分解することができた．

一般の場合にも同様にできる．分配関数を虚数部分，実数部分に分けて

$$\tilde{Z}[\tilde{J}] = \text{Exp}[i\tilde{W}[\tilde{J}]] = \text{Exp}[i\tilde{W}^R - \tilde{W}^I]$$

(3-19)

と書く．この虚数部分は，外場 $\eta(x)$ を導入して，

$$\tilde{Z}[\tilde{J}] = \int [d\eta] Q[\eta] \text{Exp}[i w[\tilde{J}, \eta]] \quad (3-20)$$

と書ける。ここに、

$$w[\tilde{J}, \eta] = \tilde{W}^R + \eta J_\Delta, \quad Q[\eta] = \int [dJ_\Delta] \text{Exp}[-\tilde{W}^I - i\eta J_\Delta]. \quad (3-21)$$

である。この局所的に定義された分配関数 $w[\tilde{J}, \eta]$ を用いて、局所的な秩序変数を決めると、

$$\varphi = \frac{\delta w}{\delta J} = \bar{\varphi} + \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-22)$$

となる。ここで、 $\bar{\varphi}$ は、全体の分布関数 $w[\tilde{J}]$ から同様に決められた秩序変数である。明らかに $\langle \varphi \rangle_\eta = \bar{\varphi}$ となる。局所的に定義された分配関数 $w[\tilde{J}, \eta]$ を用いて、ルジャンドル変換していくと、局所的な有効作用として、

$$\begin{aligned} \gamma[\varphi] &= w[J, \varphi] - J\varphi|_{J=J[\varphi]} \\ &= \Gamma^R + J(\bar{\varphi} - \varphi) + \eta J_\Delta. \end{aligned} \quad (3-23)$$

が得られる。明らかに、 $\langle \gamma[\varphi] \rangle_\eta = \Gamma^R[\bar{\varphi}]$ となる。今度の場合でも、自明な式 (3-18) を局所的な秩序変数の運動方程式とみなせる。

IV. 有効ポテンシャルの場合

さて、前節の局所的に定義された有効作用が、実際にどんな意味を持っているかを見る為に、時間空間的に定数の場に関しての有効作用、つまり有効ポテンシャル、を見よう。簡単の為に、自発的対称性の破れによって2つの同等な真空が存在する場合を考えよう。ランダムな外場 ξ が働いて、局所的に定義された秩序変数は、 φ_1 と φ_2 に凍結される。この時、全体の分配関数は、

$$\text{Exp}[-\bar{W}(J)] = \text{Exp}[-\Omega(v(\varphi_1) + J\varphi_1)] + \text{Exp}[-\Omega(v(\varphi_2) + J\varphi_2)] \quad (4-1)$$

のように書ける。ここで、 Ω は4次元体積、 $v(\varphi_i)$ 等は局所的有效ポテンシャルである。また、全体の秩序変数は、

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \bar{W}}{\partial J} = e^{-\bar{W}} [\varphi_1 e^{-\Omega(v(\varphi_1) + J\varphi_1)} + \varphi_2 e^{-\Omega(v(\varphi_2) + J\varphi_2)}] \quad (4-2)$$

と書ける。これら2式に、体積無限大の極限をとって ($\Omega \rightarrow \infty$) ,

$$V(\bar{\varphi}) = (v(\varphi_1) + v(\varphi_2))/2 + (v(\varphi_1) - v(\varphi_2)) \frac{\bar{\varphi} - (\varphi_1 + \varphi_2)/2}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

(4-3)

を得る。これは、変数 $\bar{\varphi}$ に関して線形であることに注意しよう。つまり、全体の有効ポテンシャルは φ_1 と φ_2 の間で直線なのである。従って、局所的な有効ポテンシャル $v(\varphi_i)$ 達が例え上に凸な部分を持つとしても、 $V(\bar{\varphi})$ は常に下に凸になるのである（図2）。（〔文献9〕も参考にしてください。）

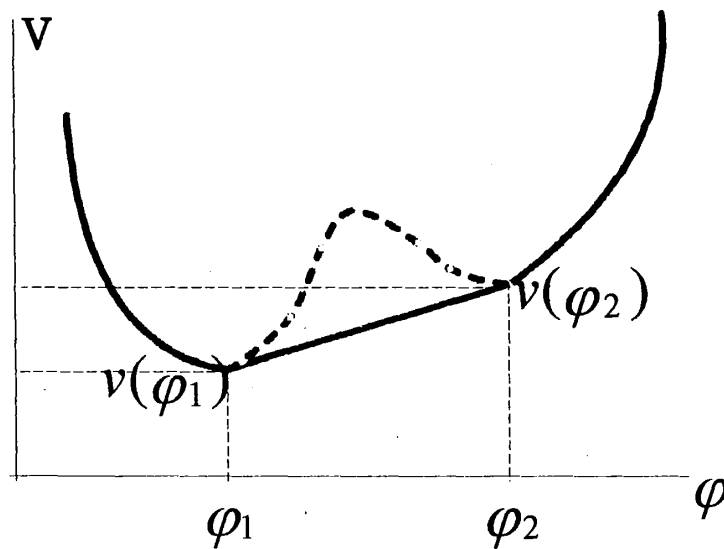


図2.

V. 多ヒルベルト空間と空間とデコヒーレンス

以上述べてきたように、一般に全体の分布関数あるいは有効作用は、通常の量子論的揺らぎの他に、もし系に不安定性があればそれに起因する統計的揺らぎも含んでいる。この統計的揺らぎは、全体系が量子的な相関を持たない幾つかの独立な部分に分離することを意味する（デコヒーレンス）（図3）。この意味で全体系は、常にひとつのヒルベルト空間の上にあるのではなく、多くのヒルベルト空間の結合として表すのが適当である。

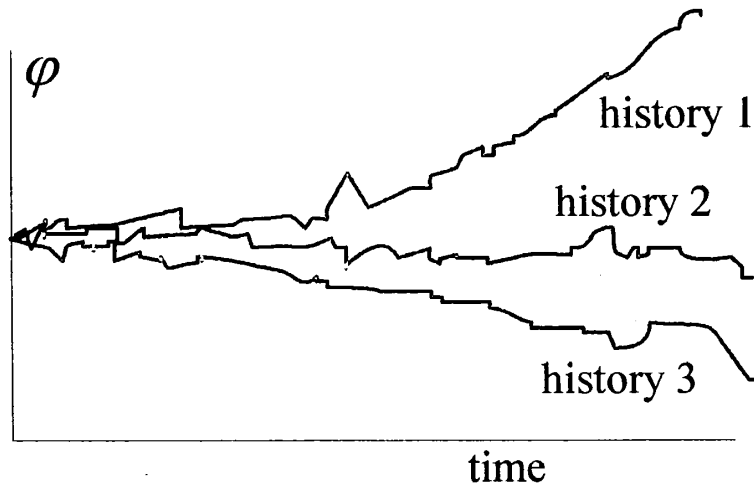


図 3.

ここで、有効作用が含む統計的揺らぎに関して、自然な疑問が出てくるだろう：上で、外場 $\xi(x)$ は、単に有効作用の虚部を統計平均の形に書き直す為だけに導入された数学的な便宜であり、この場が作用して発展する局所的な秩序変数は、普遍的な意味を持つのかどうか？我々はこの事に関して次の2段階で答えることができる。

1) 全体の有効作用は、量子的揺動と統計的揺動を含む。もし前者が後者より大きければ、以上のように統計的な要素を考察する余地はない；観測したときに初めて状態が実現する。しかし、もし前者が後者よりはるかに小さければ、外場 $\xi(x)$ が違うように作用して発展する局所的な秩序変数の履歴は、状態の観測の方法によらず普遍的に区別できる。

2) 外場 $\xi(x)$ の導入の仕方はいくつもある。しかし、履歴の統計的な性質、つまりランダム変数のすべての相関、は有効作用の虚部で完全に決まっている：

$$\left\langle \xi(x_1)\xi(x_2)\dots\xi(x_n) \right\rangle_{\xi} = \lim_{\varphi_{\Delta} \rightarrow 0} (-i)^n \frac{\delta}{\delta\varphi_{\Delta}(x_1)} \frac{\delta}{\delta\varphi_{\Delta}(x_2)} \dots \frac{\delta}{\delta\varphi_{\Delta}(x_n)} \text{Exp}(-\Gamma^I). \quad (5-1)$$

VI. 自己相互作用のある不安定なスカラー場のモデル

さて、以上述べてきた一般論を、自己相互作用のあるスカラー場（相互作用項は $\lambda\phi^4/(4!)$ ）の場合に考えてみよう。系の相転移がまさに起こり始めようとする状況では、場の質量は虚数になっている： $m^2 < 0$ 。このような不安定性がある時には、系の持っていたポテンシャルエネルギーが散逸して、系は新しい安定状態に向かって崩壊していく。このダイナミクスを知る為には、前節までに説明した方法によって、系の局所的な秩序変数を調べればよい。

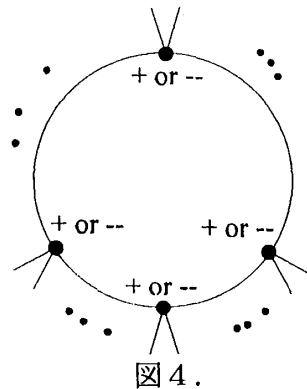
全体系の分配関数を1-ループまでの近似で計算しよう。つまり閉じた時間経路の経路積分法によって、

$$Tr \ln[(\square + m^2 + V''(\phi))(\square + m^2)^{-1}] \quad (6-1)$$

を計算すればよい。ただし場がダイナミカルなので、正確にはこれを計算できない。もし場が完全に定数なら、その計算はできる。しかし我々が欲しいのはまさにダイナミカルな場である。従って我々は、定数の場 ϕ_0 からのダイナミカルなずれ $\phi(x) - \phi_0$ に対しての摂動論の最低次をとる事にしよう。これは、もし場 $\phi(x)$ が、ループをまわる最重要なエネルギー運動量のスケールより十分小さいスケールでゆっくり変動する場合

$$\dot{\phi} / \phi, \partial\phi / \phi \ll |m^2| \quad (6-2)$$

には、信頼できる計算ができる。(6-1) の計算のためには、+ や - の結節点をあらゆる方法で組み合わせたファインマン図 (図 4) を系統的に計算しなければならない。



一見複雑そうに思えるが、'tHooft と Veltman の "Diagrammer" [文献 10] の中で議論されている計算方法が、閉じた時間経路の経路積分法の場合にそのまま使える。つまり次の表 1 の対応がある：

Diagrammer	in-in QFT
underlined vertex	-- vertex
un-underlined vertex	+ vertex
various replaced propagators	$\tilde{G} = \begin{pmatrix} G_F & G_+ \\ G_- & G_{\bar{F}} \end{pmatrix}$
changes of the interaction vertex	$\tilde{V} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & -V \end{pmatrix}$

表 1.

更に, 真空中では, "Diagrammer" の中で議論されている "largest time rule", "Cutkosky's cutting rule" などがそのまま使える:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) + F(x_1, x_2, \dots, x_n) = - \sum_{\substack{\text{all possible} \\ \text{cuttings with} \\ \text{all } \pm \text{ combinations}}} F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6-3)$$

また, これらから, 特に真空中では散逸 (A) と揺動 (B) に関して,

$$A(k) = B(k) \operatorname{sgn}(k_0) \quad (6-4)$$

の関係がある. また, 式 (3-6) 等から, 次の図 5 ようなグラフと各反作用 (A, B, D) との対応がある.

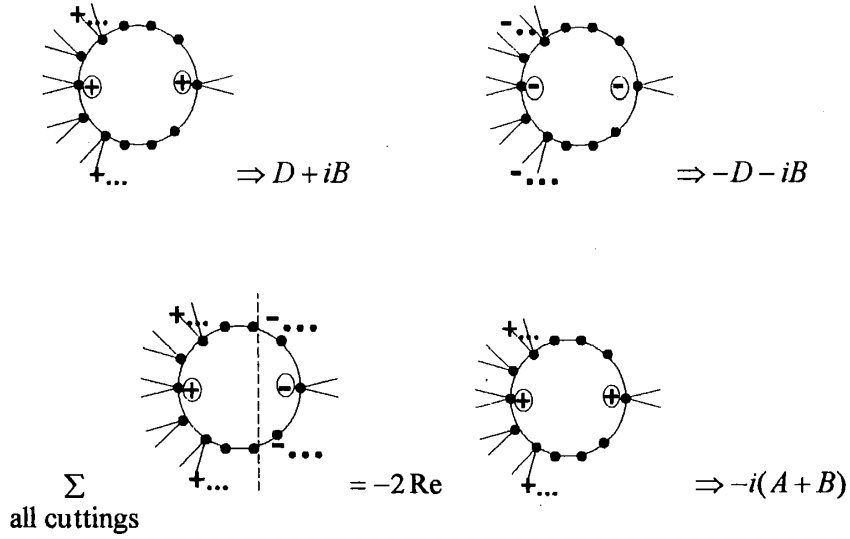


図 5.

このようにして $\tilde{\Gamma}[\varphi_{\pm}(x), \varphi_{\pm,0}]$ を系統的に計算していくことができる. 我々の $\lambda\phi^4$ 理論では, すべて+の結節点を持つグラフの寄与は,

$$V_{eff}^+ = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\ln \left(1 - \frac{\lambda \varphi_+^2 / 2}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) + \frac{\lambda \varphi_+^2 / 2}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda \varphi_+^2 / 2}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right)^2 \right] \quad (6-5)$$

であり, 有効作用の虚部は

$$\begin{aligned}
\Gamma^I[\varphi] &= \int \varphi_{\Delta}(x) \varphi_C(x) \frac{-\delta^2 V_{eff}^I}{\delta(\varphi_0^2)^2} \varphi_C(x) \varphi_{\Delta}(x) \\
&= \int \frac{\lambda^2}{128\pi} \theta(m^2 - \frac{\lambda}{2} \varphi_0^2) \varphi_C^2(x) \varphi_{\Delta}^2(x)
\end{aligned}
\tag{6-6}$$

で与えられる。これは正定値である。従って、前節までの確率解釈が保証されて、ランダム変数の相関は

$$\langle \xi(x) \xi(y) \rangle_{\xi} = \frac{\lambda^2}{128\pi} \varphi_C^2(x) \delta^4(x-y).
\tag{6-7}$$

によって与えられる。

ただしここまでのモデルと近似では、式(6-7)に $\varphi_C(x)$ が入っているの、残念ながら初期に $\varphi_C(x)=0$ であればランダム力は働かない。つまり、完全に対称な状態からの時間発展は存在しない事になる。しかし実際問題としては、2ループまで考えに入れるか(図6左のグラフ)、又は初めから $\lambda\phi^3$ -モデルを考えれば(図6左のグラフ)、初期に $\varphi_C(x)=0$ であっても、自発的に対称性が破れていく事になる。

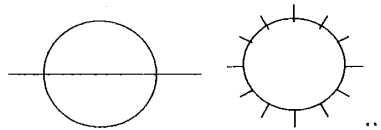


図6.

V_{eff}^R の下に凸な領域では、このモデルだけでは散逸もランダム力も存在しないが、実際問題としては他のいろいろな場との結合によってさらに緩和していくと考えられる。

VII. まとめ

この報告では、自発的対称性の破れがどのように進行するかを、特に空間的非一様性の起源となる統計的揺らぎを単なる量子揺らぎと区別して取り出す方法を強調して、議論した。以下に、この議論によって期待される相転移の進行を以下に要約する。

stage1) 外界の温度や圧力の変化により、場の有効質量 $m^2(T,P)$ が負になり、不安定性が出現する。

stage2) この不安定性により有効作用は複素数になり、全体系の有効作用は実数の局所的有効作用の統計的重ねあわせの形になる。その統計性は、形式的にはランダムな外場を用いて表現できるがその統計的性質はすべて有効作用の虚部によって決まっている。特に時間空間的に一様な場に限った場合、局所的有効ポテンシャルの実部 $V_{eff}^R(\varphi)$ は、上に凸になりうる。ただし統計

的に重ね合わされたもの $\bar{V}_{eff}^R(\phi)$ は常に下に凸である。一般に平均された局所的秩序変数 $\bar{\phi}(x)$ は常に対称状態に留まる。

stage3) 初めに対称状態にあった局所的秩序変数 $\phi(x)$ はポテンシャル $V_{eff}^R(\phi)$ 上をランダム力を受けながら転がり、自発的対称性の破れが進行する。

stage4) これは、ランダム力によって各空間的に独立に進行し、ランダム力が持つ相関によって、 $\phi(x)$ の空間的パターンが形成されていく。この過程で、場はデコーレンスを起こしていく。このパターンが更に進行して、a) 密度の揺らぎから銀河形成の種が、b) 位相的欠陥から宇宙の大局構造が、また、c) さらに大きな構造から、宇宙の多重発生の可能性が開けてくるのである。

参考文献

- [1] R. Brandenberger, Rev. Mod Phys. **57**, 1 (1985) など.
- [2] A. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Academic Publisher GmbH, Switzerland (1990).
- [3] M. Morikawa, Prog. Theor. Phys. **77**, 1163 (1986).
- [4] I. Lawrie, Phys. Rev. **D40**, 3330 (1989).
- [5] H. Weldon, Phys. Rev. **D28**, 2007 (1983).
- [6] A. Niemi and G. Semenoff, Nuclear Phys. **B230**, 181 (1984).
- [7] K. Chou, Z. Su, B. Hao, and L. Yu, Phys. Rep. **118**, 1 (1985).
- [8] M. Morikawa, Phys. Rev. **D33**, 3607 (1986).
- [9] Y. Fujimoto, L. O'raifeartaigh, G. Parraricini, Nuclear Phys. **B212**, 268 (1983).
- [10] 'tHooft and Veltman, *Diagrammer*, CERN Yellow report 73-9 (1973).